ĐỀ CƯƠNG ÔN THI SAU ĐẠI HỌC
MÔN TOÁN CAO CẤP

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG I – MA TRẬN – ĐỊNH MỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

1/ Các phép toán ma trận:

KH: $A \in M_{mxn}$ (R)

$A = (aij)_{mxn}$

$B = (bij)_{mxn}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A + B = (Cij)_{mxn}$: Cij = aij + bij

$\lambda A = (\lambda\, aij)_{mxn}$

(+) A^T (Ma trận chuyển vị) $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & ...... & a_{m2} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mm} \end{pmatrix}$

+/ Nhân ma trận .

VD: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

2/ Định thức. det ; $|A|$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ det A = a.d – b.c

<u>Tính chất cơ bản.</u> $\det A^T = \det A$

(+) T/c 1: Khi đổi dấu hai hàng $\Rightarrow$ định thức đổi dấu

VD: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$; $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$

(+) T/c 2 : Thừa số chung của một hàng có thể đưa ra ngoài dấu định thức.

VD: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 \times 2$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(+) T/c 3: Định thức có hai hàng tỷ lệ = 0: $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 12 & 12 \end{vmatrix} = 0$

(+) T/c 4: Khi cộng vào 1 bội của hàng khác thì định thức không thay đổi:

VD: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}^{x(-2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

***) Khái niệm phần phụ đại số:**

Cho A = $(aij)_{mxn}$ phần phụ đại số của phần tử aij ký hiệu là Aij

Aij = $(-1)^{i+j}$ (cấp n-1)

Trong đó: Mij định thức của ma trận cấp (n -1) nhận được từ A bằng cách xóa khỏi A hàng i và cột j:

VD: A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{12} = (-1)^{1+2} . \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $A^{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$A_{33} = (-1)^6 . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$; $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

*) Khai triển phần phụ đại số (định thức).

A = $(aij)_{mxn}$

det A = $\sum_{j-1}^{n} aijAij$ (1) ; i = $\overline{1,n}$

(khai triển theo hàm i)

VD: A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

det A = $1.A_{11} + 2.A_{12} + 4A_{13}$

= 1.1 + 2(-1) + 4.3 = 9

Or: det A = $1.A_{21} + (-1).A_{22} + 4$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$; $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

1.6 + (-1).(-3) = 9

det A = $1.A_{31} + 2.A_{32} + 1.A_{33}$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$; $A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

det A = 1.4 + 2.(-4) + (-3) = 9

*) det A = $\sum_{i-1}^{n} aijAij$ (2) ; j = $\overline{1,n}$

(khai triển theo hàm j)

det A = 4.A_{13} + 0. A_{23} + 1.A_{33}
= 4.3 + (-3) = 9

det A = 2. A_{12} + (-1) A_{22} + 2 A_{32}

$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$

= 2.(-1) + (-1) (-3) + 2. 4 = 9

VD: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 15 \end{vmatrix}$ det A = 2. A_{21} + 0 A_{22} + A_{23}.7

$A_{21} = (-1)^3 . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = -15$; $A_{23}\ (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$

det A = 2.(-15) + 7 .3 = 9

det A = 1. A_{11} + 1. A_{12} + 4 A_{13}

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = 0$; $A_{23} = (-1)^5 . \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = -9$

$A_{13} = (-1)^4 . \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$;

det A= 1.0 +1.(-9) + 4.0 = - 9

- **<u>Chú ý:</u>** Để tính nhanh định thức $\Rightarrow$ vận dụng các tính chất cơ bản làm xuất hiện tối đa các số 0 trong một hàng một cột đêt tính.

VD : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 0 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -16 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$

= - 40 – (-16).8
= -40 +128 = 88

CHƯƠNG II: MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

A $\in$ M_n (R)
Nếu $\exists$B $\in$ M_n (R) sao cho AB = BA = In
AI = A (Ma trận đơn vị $\leftrightarrow$ ma trận vuông det A_{dv} = 1)
IB = B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & .. & \ldots & .. \\ \ldots & .. & \ldots & \ldots \\ 0 & .. & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Thì : A gọi là khả nghịch (nghịch đảo)
B gọi là nghịch đảo của A. $A^{(-1)}$

***) Các định lý** : Điều kiện khả nghịch
Điều kiện cần và đủ để A khả nghịch : det $A \neq 0$.
+) Công thức tính ma trận nghịch đảo :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots. & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots. & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Chú ý : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}.\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^{T} = \dfrac{1}{ad-bc}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

VD: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = A$

$\Rightarrow$ $A^{-1} = \dfrac{1}{7-6}.\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(+) Để tìm Ma trận nghịch đảo dùng phương pháp Grauss = cách giả các nghiệm hệ phương trình.

$(A.B)^{-1} = (B)^{-1} (A)^{-1}$
$(AB) . (B^{-1} A^{-1}) = A.(B.B^{-1}) .A^{-1}$
$= A. A^{-1} = I$
$(B^{-1} A^{-1}).(AB) = I$

VD: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tìm X,Y sao cho AX =B (1)
YA = B^T (2)

(1) $AX = B \Leftrightarrow A^{-1} .A.X = B. A^{-1}$
$\Rightarrow X = B. A^{-1}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{4-3}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X = B. A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $YA = B^T$

$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $YA = B^T \Leftrightarrow Y.A.\ A^{-1} = B^T .\ A^{-1}$

$\Rightarrow Y = B^T .\ A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

CHƯƠNG III: HẠNG CỦA MA TRẬN

1/ Định nghĩa .

Cho $A = (aij)_{mxn}$

rank (A) = ?

- Là một số tự nhên: $A = 0 \Rightarrow$ rank A = 0

$A \neq 0$

$\rightarrow$ ít nhất một phân tử $\in A \neq 0$

VD: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ có các định thức con.

$\Rightarrow A \neq 0$; rank (A) là cấp cao nhất của định thức con $\neq 0$ của A.

* Chú ý: rank A $\leq$ min { m; n} $A \in M_{mxn}(R)$

2/ Để tính hạng của ma trận ta dùng các phép biến đổi sơ cấp.

+ Nhân nhân một hàng (cột) với 1 một số bất kỳ $\neq 0$

+ Đổi chỗ hai hàng bất kỳ

+ Cộng vào một hàng 1 bội của hàng khác.

$\rightarrow$ Biến đổi $A \Rightarrow B$ mà hạng của B có thể tính được như định nghĩa.

*** / <u>Cơ sở :</u>** Các phép biến đổi sơ cấp không hàm thay đổi hạng của Ma trận.

VD: Tìm rank (A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = B$$

Rank B = 2 $\Rightarrow$ rank A = 2.

CHƯƠNG IV: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1/ Định nghĩa.

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}xn & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ .. & .. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \; A' = \begin{pmatrix} & : & b_1 \\ A & : & b_2 \\ & : & b_m \end{pmatrix} \text{ (ma trận mở rộng)}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(I) $\Leftrightarrow$ A X = B

Nên B = 0 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}$ AX = 0 : hệ thuần nhất .

2/ Hệ CRAMEK:

a) Định nghĩa: AX = B (*) ; A $\in$ Mn (R)

A khá nghịch

b) Là hệ có nghiệm duy nhất.

$A^{-1}AX = A^{-1}B \leftrightarrow X = A^{-1}.B$

$x_i = \dfrac{D_i}{D}$; D = detA ($\neq 0$)

D_i: Định thức nhận được từ A bằng cách thay cột i bởi cột số tự do bớt B.

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow$ D = ab' – a'b $\neq 0$

$x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D}$; $\qquad y = \dfrac{D_y}{D}$.

3/ Định lý Croneker – Capelli.

Xét hệ : AX = B (I)

Nếu: rank (A) $\neq$ rank (A') $\Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

rank (A) = rank (A') $\Rightarrow$ hệ có nghiệm.

(+) Rõ hơn (có nghiệm).

Nếu rank(A) = rank(A') = n số ẩn $\Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất.

rank(A) < n $\Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát: Phụ thuộc vào n – r hằng số tùy ý:

Cách thường dùng $\Rightarrow$ Gauss .

***) Hệ quả**: (liên quan đến hệ thuần nhất).

(1) Hệ thuần nhất luôn có nghiệm (ít nhất có 1 nghiệm x = 0 nghiệm tầm thường).

(2) Khi nào thi hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường ?

Khi: r (A) < n

(+) Đặc biệt: Hệ có số phương trình < số ẩn $\Rightarrow$ hệ vô số nghiệm

VD: $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z+2t=0 \end{cases}$

+ Hệ AX = 0 ; A$\in$ M_n (R) có nghiệm không tầm thường

$\Leftrightarrow$ det A = 0.

VD: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$ det A = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ = 3 $\neq$ 0.

$\Rightarrow$ hệ PT có nghiệm tầm thường x= 0.

4/ Giả hệ bằng phương pháp: Gauss.

VD: Giải hệ phương trình:

VD $_1$ $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

Ta giải hệ bằng phương pháp Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=2 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

VD$_2$ $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x-y+z=3 \\ 4x-3y+3z=7 \end{cases}$

Ta giải hệ bằng phương pháp Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 3 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ $\Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát là: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c-1 \\ c \end{pmatrix}$

***) Chú ý**: Dùng phương pháp Gauss tìm ma trận nghịch đảo bằng cách đưa về dạng giải n hệ phương trình có cùng vế phải.

VD Tìm Ma trận nghịch đảo:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Giả sử $A^{-1} = (X_1, X_2, X_3)$

$$A\,A^{-1} = (AX_1,\ AX_2, AX_3) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\quad AX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\quad AX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ta giải hệ bằng phương pháp Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vậy } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B - KHÔNG GIAN VÉCTƠ :

I / Định nghĩa và VD:

A/ 1 tập hợp V $\neq \emptyset$ mà trên đó đã xây dựng 2 phép toán.

+ Phép cộng véc tơ.

+ phép nhân véc tơ với số.

- Thỏa mãn các tiêu đề và điều kiện sau:

- Có tính kết hợp, x + (y + z) = (y+x) = z ; $\forall$ x,y,z $\in$ V
- Có tính giao hoán: x+y = y+x ; $\forall$ x,y $\in$ V
- $\exists$ mọi phân tử o $\in$ V , x + 0 = x .
- α (px) = $\beta(\alpha x) = (\alpha\beta).x$, $\forall \alpha.\beta \in R$, $\forall x \in V$
- $\forall x \in V \to \exists y \in V$ sao cho x + y = $\emptyset$

VD $_1$ $|R^n$ Tập hợp các hệ số có dạng $(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$

Nếu x = $(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$

y = $(y_1, y_2, y_3 \ldots y_n)$

$\Rightarrow$ x+y = $((x_1 + y_1), (x_2 + y_2) \ldots\ldots (x_n + y_n))$

$\lambda x = (\lambda x_1,\ \lambda x_2 \ldots\ldots\ldots \lambda x_n)$

$\emptyset$ = (0,0,…..,0)

$-x = (-x_1, -x_2 \ldots\ldots\ldots -x_n)$

VD$_2$ $M_{mxn}(R)$: Tập hợp các ma trận

- Cộng ma trận.
- Nhân ma trận với số.

II/ Khái niệm phụ thuộc tuyến tính, độc lập tuyến tính:(chỉ xét hệ hữu hạn véctơ)

+) Định nghĩa.

Hệ: B = (b_1, b_2.........b_m) $\subset$V

Gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu: phương trình sau có nghiệm không tầm thường.

$\lambda_1 b_1,\ \lambda_2 b_2 \ldots\ldots\ldots \lambda_m b_m = \emptyset$

(cách khác : nếu $\exists$mọi các số λ_1, λ_2.........λ_m không đồng thời = 0 sao cho thỏa mãn (1)

$$\lambda x = \emptyset \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \lambda = 0 \end{array} \right.$$

- Hệ không phụ thuộc khi gọi là độc lập tuyến tính.
- Nói cách khác: Hệ B không độc lập tuyến tính . nếu (1) chỉ có nghiệm tầm thường.

VD. Xét xem các véc tơ sau phụ thuộc hay độc lập.

a) $b_1 = (1, 1, -1)$
   $b_2 = (2, 1, 3)$ B (b_1 ,b_2 ,b_3)
   $b_1 = (1, 2, 1)$

b) $C_1 = (1, 2, -1)$
   $C_2 = (2, 1, 1)$ C (c_1 ,c_2 ,c_3)
   $C_1 = (3, 0, 3)$

a) Xét hệ thức: $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = \emptyset$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên là hệ thuần nhất AX = 0.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Vậy hệ trên có nghiệm tầm thường $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$Hệ trên độc lập tuyến tính.

b) Xét hệ thức: $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = \emptyset$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên là hệ thuần nhất AX = 0.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$Hệ trên phụ thuộc tuyến tính.

(Bản chất vấn đề).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \text{vô số nghiệm } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}$$

Nói cách khác: $C_1 - 2C_2 + C_3 = \emptyset$

III/ Khái niệm không gian véctơ con

1) Định nghĩa

Cho V là 1 một không gian véctơ

$U \subset V$; $U \neq \emptyset$

Thỏa mãn: $\forall x$, y$\in$ U; x+y $\in$ U

$\forall x \in$ U; $\lambda \in$ R ; $\lambda x \in$ U .

VD: CM tập hợp sau là không gian vectơ con:

$F = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3;\ x_1, x_2, x_3 = 0\}$

Lấy $x = (x_1, x_2, x_3) \in F$

$y = (y_1, y_2, y_3) \in F$; $\lambda \in R$.

$x + y = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

Ta có: $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3) = 0$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3) + (y_1+y_2+y_3) = 0$

$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow x + y \in F$ Tương tự $\lambda \in F$ $\Rightarrow$ F là 1 không gian véctơ con

2/ Định lý

a) Giao của 2 không gian véc tơ con:

Giả sử U_1, U_2 là 2 không gian con của V khi đó U_1 giao U_2 là không gian véc tơ con của V.

b) Định lý 2.

Cho U_1, U_2 2 không gian véc tơ con của V.

Xét tập: $U = \{x \in V, x = x_1 + x_2 ; x_1 \in U_1; x_2 \in U_2 \}$

Là không gian vec tơ con của V và gọi là tổng của 2 không gian U_1 và U_2

$U = U_1 + U_2$

Đặc biệt : $U_1 \cap U_2 = \{ o\}$

$\Rightarrow$ U gọi là tổng trực tiếp : $U = U_1 + U_2$

IV - Số chiều - cơ số - hệ sinh

1. ĐN số chiều của không gian vec tơ

Không gian vec tơ V gọi là không gian n chiều (dim V = n)

- Trong V tồn tại một họ n vec tơ độc lập tuyến tính
- $\forall$hệ số véc tơ > n đều phụ thuộc tuyến tính

($\Leftrightarrow$ $\forall$hệ có n + 1 đều phụ thuộc tuyến tính)

VD: $|R^2$ là không gian 2 chiều.

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & e_1 & = & (1;0) \\ \lambda_2 & e_2 & = & (0;1) \end{array}$$

CM : 2 véc tơ e_1 e_2 đltt

Xét pt : $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \varnothing$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 0$ ĐPCM

+ Xét 3 v/t bất kỳ

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & x & = & (x_1;x_2) \\ \lambda_2 & y & = & (y_1;y_2) \\ \lambda_3 & z & = & (z_1;z_2) \end{array} \in R^2$$

Xét hệ phương trình: $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = \varnothing$ (*)

$$(*)\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1 + \lambda_3 z_1 = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 z_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ tuyến tính thuần nhất có số phương trình =2 < số ẩn $\Rightarrow$ pt vô số n^o (n^o không tầm thường)

$\Rightarrow$ x,y,z độc lập tuyến tính

Tổng quát $|R^n$ không gian n chiều

2/ cơ sở tọa độ của véc tơ

a) Định nghĩa

Giả sử dim V = n

Khi đó mỗi hệ gồm n véc tơ độc lập tuyến tính

b) Định lý:

Giả sử : B = (b_1, b_2 ,…….b_n) là một cơ số của V

Khi đó : với mỗi $x \in V$; $\exists$! 1 bộ số (x_1, x_2 ,….. x_n)

Sao cho : $x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + ... + x_n b_n$

Bội số nói trên (x_1, x_2 …..x_n) gọi là tọa độ của véc tơ x trong cơ số

$\Rightarrow$ Ký hiệu : $[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}$

Chú ý : B = (b_1, b_2, b_3)

$\Rightarrow$ $[x]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow x = 1.\, b_1 + 1.b_2 + 4b_3$

*Chú ý : $[x+y]_B = [x]_B + [y]_B$

$\lambda\,[x]_B = [\lambda x]_B$

3/ Hệ sinh - phương pháp tìm số chiều của không gian véc tơ

(hệ sinh của không gian vec tơ con nói riêng và của không gian vt nói chung)

Giả sử : U là không gian con của không gian V.

Hệ: B = (b_1, b_2 ,……. b_m) gọi là mọi hệ sinh của không gian U.

Nếu : ∀ véc tơ của U đều biểu diễn tuyến tính qua véc tơ b_1 b_2 ......b_m

($\forall x \in V$, $x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_m b_m$

<u>Định lý:</u> Trong không gian hữu hạn chiều mỗi cơ sở sẽ là một hệ sinh

→ mỗi một hệ sinh độc lập tuyến tính là một cơ sở .

+) <u>Chú ý</u>: Từ định lý trên có phương pháp thường dùng để tìm cớ sở (tìm số ẩn) của một không gian cho trước là tìm một hệ sinh độc lập tuyến tính .

VD: CMR dim $|R^n$ = n

Nếu x∈ $|R^3$, → x = (x_1 , x_2 ,x_3) (3 tp tự do)

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1,0......,0)\\
e_2 &= (0,1.......,0)\\
\text{Xét } .... &= ....\\
e_{n-1} &= (0,.......1,0)\\
e_n &= 0,..........0,1)
\end{aligned}
$$

+ CM : hệ (e_1, e_2 …….e_n) là hệ sinh

Lấy x = (x_1, x_2 …..x_n) tùy ý ∈ $|R^n$

Nhân x.(x_1, x_2 …..x_n) vào hệ (e_1, e_2 …….e_n) ta có :

$x = x_1e_1 + x_2\, e_2 \ldots . x_n e_n$

⇒ hệ sinh

+ CM : e_1, e_2 …….e_n độc lập tuyến tính

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2\, e_2 + \lambda_n e_n = \varnothing$

⇔(λ_1, λ_2……… λ_n) = (0,0,…….,0)

⇒ hệ độc lập tuyến tính.

ĐPCM dim $|R^n$ = n.

VD: Trong $|R^4$ các véctơ a = (1,1,-1,2)

b = (2,1,3,1) U = $\mathcal{L}$(a,b,c,d)

c = (3,2,7,0) Tìm dim U = ?

d = (4,3,1,5)

B/S: $\begin{cases} e_1 = (1,0.........,0) \\ e_2 = (1,0,.........0) \\ .... \\ e_n = (0,0,......,1) \end{cases}$ ⇔ Cơ sở chính tắc

Xét: A gọi E là cơ số chính tắc của $|R^4$

Gọi A = $[[a]_E [b]_E [c]_E [d]_E]$

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ Ta có: dim U = rank(A) $\Rightarrow$ tìm rank (A)

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$

$\Rightarrow$ rank(B) = 2 $\to$ rank (A) = 2 $\Rightarrow$ dim U = 2

$\overline{\text{V}}$ - Ánh xạ tuyến tính

I/ Định ngĩa

1/ ĐN cho U,V là 2 không gian véctơ (trên đường số thực)

Ánh xạ $\mathcal{F}$:V $\to$ V gọi là ánh xạ tuyến tính nếu thỏa mãn

$\begin{cases} f(x,y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$ $\forall$x,y $\in$ U ; $\forall\lambda \in$ R.

VD: Cho A = (aij)$_{mxn}$

Xét f: $|R^n \to |R^m$

X $\to$ AX. Là 1 ánh xạ tuyến tính từ $|R^n$ và $|R^m$

Vì : f (X,Y) = A(X + Y) = AX + AY

= f(X) + f(Y)

f(λX) = A.(λX) = λAX = λf(x)

Vậy $\Rightarrow$ ánh xạ tuyến tính

2/ Tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính.

(+) Cho f .U $\to$ V là ánh xạ tuyến tính

+ f ($\varnothing$ u) = $\varnothing$ v

f($\sum_{i-1}^{m} \lambda_i x_i$) = $\sum_{i-1}^{m} \lambda_i f(x_i)$

Hệ quả: Ánh của một họ phụ thuộc tuyến tính thì phụ thuộc tuyến tính.

VD: cho B = (b1, b_2 ,…..b_n) phụ thuộc tuyến tính

$\to$ f(B) = (f(b1), f(b_2),…..f(b_n)) phụ thuộc tuyến tính

II - Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

1/ Cho: f: U $\to$ là ánh xạ tuyến tính.

Khi đó: ker f = { x $\in$ V_1, f (x) = $\varnothing$ v } gọi là nhân của axtt.

Là không gian véc tơ con của U là gọi là hạt nhân của ánh xạ f kh: Rer f .

2/ f(A) = { y $\in$ B | $\exists$x $\in$ A, f(x) = y } gọi là ánh của f.

Im f = {y∈V| ∃x ∈ U, f(x) =y} là không gian véc tơ con của V và gọi là ánh của f.

$\boxed{\dim . \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U}$ (dim U < ∞)

VD: cho f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 - x_2, 2x_1 + x_3)$ $(f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2, 2x_1 + x_3$

CMR: f là ánh xạ tuyến tính, tìm ker f , Im f

a) Lấy x = $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

y = $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

x + y = $(x_1+y_1, x_2 +y_2, x_3+y_3)$

$\Rightarrow f(x+y) = [(x_1+y_1) +(x_2 +y_2); 2.(x_1+y_1) + (x_3+y_3)]$

$= (\underbrace{(x_1- x_2); 2x_1+x_3)}_{f(x)} + \underbrace{(y_1- y_2, 2y_1+ y_3)}_{f(y)}$

= f(x) + f(y)

Tương tự : f(λ x) = λf(x) ⇒ f(x) ánh xạ tuyến tính.

b/ Tìm ker f:

x = $(x_1, x_2, x_3) \in$ ker f ⇔ f(x) = 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{pt vô số ẩn}$$

N° tổng quát: $(x_1, x_2, x_3) = (C, C, -2C)$; C ∈ R.

Vậy Ker là kkhoong gian con 1 chiều của $\mathbb{R}$ sinh bởi véc tơ (1, 1,1-2)

+ Tìm Imf:

- Ta có: dim Ker f + dim Im f = dim $\mathbb{R}^3$ = 3.
- $\left.\begin{array}{r} \dim Kerf = 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2 \\ ma \operatorname{Im} flakgconcuaR^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$

C_2/ Gọi y = $(y_1, y_2) \in$ Im f

⇔ f (x) = y có nghiệm. hay hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_3 \\ 2x_1 + y_3 = y_2 \end{cases}$$

Vậy phải tìm y_1, y_2 sao cho hệ có nghiệm

Hệ trên là hệ tuyến tính không thuần nhất: 2 pt 3 ẩn phụ thuộc nhau số y_1, y_2 có ma trận.

A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, A' = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 2 & 0 & 1 & y_2 \end{pmatrix}$

Để hệ có nghiệm, điều kiện là: rank(A) = rank(A').

Ta có: rank(A) = 2; rank(A') = 2. $\forall y_1, y_2$

$\Rightarrow$ Hệ luôn có nghiệm $\forall y_1, y_2$

$\Rightarrow$ Im f = $|R^2$

BÀI TẬP:

1/ Trong $|R^4$ cho f $\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \end{matrix}\right\}$

Cm: f là không gian véc tơ con của $|R^4$ tìm số chiều và một cơ số của f

Giải:

Gọi X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ $\in$ F $\Leftrightarrow$ AX = 0 với A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Gọi y = $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ $\in$ F $\Leftrightarrow$ AX = 0 $\Rightarrow$ A(X+Y) = AX + AY = 0 $\Rightarrow$ X +Y $\in$ F

A(λ X) = λAX = λ.0 = 0

λ X $\in$ F

Vậy f là không gian véc tơ con của $|R^4$

+) A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

I = $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = x_3 - x_4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = x_4 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ c \\ c \end{pmatrix}$

2/ Tìm số chiều của không gian con sinh bởi các véc tơ (a_1, a_2, a_3, a_4)

$$\left.\begin{matrix} a_1 & (1,1,2) \\ a_2 & (2,1,1) \\ a_3 & (3,1,0) \\ a_4 & (5,4,7) \end{matrix}\right| R^3$$

Ta có A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

Gọi E là cơ số chính tắc của $|R^3$

Gọi A = $([a_1]_E, [a_2]_E [a_3]_E [a_4]_E)$

Ta có: dim U = rank A

$\rightarrow$ A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rank (B) = 2 $\rightarrow$ rank (A) =2

$\Rightarrow$ dim U = rank A = 2.